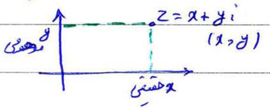
جلسه پانزدهم ۹۴/۱/۲۲

آنالیز مختلط

۱/ نمایش اعداد مختلط

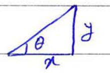
$z = x + yi$ $\quad$ i: واحد موهومی $\quad$ $i = \sqrt{-1}$ $\quad$ $i^2 = -1$

x: بخش حقیقی $\quad$ yi: بخش موهومی



۲/ اندازه و زاویه

$z = x+yi$ $\quad$ $r = \|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$



$\theta = \arg z = \tan^{-1} y/x$

$\Theta = \tan^{-1} y/x \quad -\pi < \Theta \leq \pi \longrightarrow \Theta =$ آرگومان اصلی z

$\arg(-1) \longrightarrow \pi$

مثال)

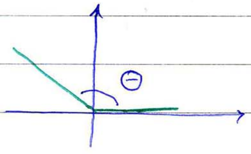
$z = -1 \quad x = -1 \quad y = 0$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \qquad \Theta = \tan^{-1} 0 \longrightarrow 0 \qquad x > 0 \quad ✗$

$\searrow \pi \qquad x < 0 \quad ✓$

$\arg(-1) = \Theta = \pi$

Θ: زاویه‌ای که از اتصال نقطه‌ی z به مبدأ با جهت مثبت محور x ها به دست می‌آید.



۳) مزدوج عدد مختلط

$z = x + yi$

$\bar{z} = x - yi$ مزدوج z

خواص:

$\bar{z} z = \|z\|^2 \qquad \left(\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}\right)$

اثبات $\rightarrow \quad \bar{z} z = (x - yi)(x + yi) = x^2 - xy + xy - y^2(i^2) = x^2 + y^2 = \|z\|^2$

مثال)

$\frac{1+i}{2-i} = ?$

$$\frac{1+i}{2-i} = (1+i)\frac{1}{2-i} = (1+i)\frac{2+i}{4+1} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{(2-1+2i+i)}{5} = \frac{1+3i}{5}$$

۴) نمایش قطبی اعداد مختلط

$z = x + yi$

$\theta = \tan^{-1} y/x \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad z = re^{i\theta} \qquad (e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta \quad \longrightarrow \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

مثال)

$z = 1 + i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \theta = \tan^{-1} 1/1 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}\checkmark, \; -\frac{3\pi}{4}$

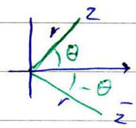
$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

۵) محاسبه‌ی وارون و مزدوج در نمایش قطبی

$z = re^{i\theta}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ برای محاسبه‌ی وارون استفاده از نمایش قطبی ساده‌تر است

$\bar{z} = re^{-i\theta} \qquad \left(\bar{z} = \frac{1}{z}\|z\|^2 = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\, r^2 = re^{-i\theta}\right)$



۶) توان عدد مختلط

a اسکالر حقیقی

$z^a = ?$

$z = re^{i\theta} \longrightarrow z^a = r^a e^{i(a\theta)}$

مثال)

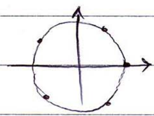
$\sqrt[5]{1} = ?$

$\sqrt[5]{1} = z \longrightarrow z^5 - 1 = 0$

$w = 1 \qquad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \end{matrix} \longrightarrow \theta = 0 \qquad \begin{matrix} \theta = 2k\pi \\ r = 1 \end{matrix} \longrightarrow w = e^{2k\pi i}$

$z = \sqrt[5]{w} = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$

$z = 1,\ e^{\frac{2\pi}{5}i},\ e^{\frac{4\pi}{5}i},\ e^{\frac{6\pi}{5}i},\ e^{\frac{8\pi}{5}i}$



ریشه های معادله‌ی $z^5 - 1 = 0$ ←

۵ عدد مختلط با نرم ۱ هستند

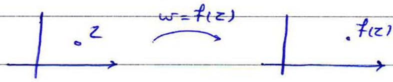
که زاویه‌ی هر یک با قبلی به اندازه‌ی $\frac{2\pi}{5}$ تفاوت دارد. این نقاط روی دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۱ قرار دارند.

توابع مختلط

$(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ حقیقی

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ تابع مختلط

مجموعه اعداد مختلط



$f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$

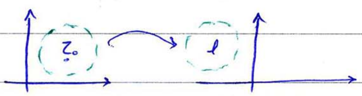
مثال)

$f(z) = z^2$

$f(x+yi) = (x+yi)^2 = (x+yi)(x+yi) = x^2 + y^2 i^2 + 2xyi = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)} i$

تعریف حد

می‌گوییم $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ اگر وقتی z به z_0 نزدیک می‌شود، $f(z)$ به L نزدیک شود



$\|z - z_0\| < \delta \qquad \|f(z) - l\| < \varepsilon$

مثال) $\lim_{z\to i} z^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} x^2-y^2+2xyi = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (x^2-y^2) + i\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} 2xy = -1+0\times i = -1$

$\|z-i\|<\delta \longrightarrow \|z^2+i\|<\varepsilon$

$z^2+1=(z-i)(z+i) \qquad \|z^2+1\| \le \|z-i\|\|z+i\| < \|z+i\|\delta \quad (1)$

$\|z+i\| = \|z-i+2i\| \le \|z-i\|+\|2i\| < \delta+2 \quad (2)$

$(1),(2) \longrightarrow \|z^2+1\| < \underbrace{(\delta+2)\delta}_{\varepsilon}$

جلسه پانزدهم ۹۴/۱/۲۴

مشتق توابع مختلط

تعریف حد

$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ را در صورت وجود مشتق تابع f در نقطه‌ی z می‌گوییم و با $f'(z)$ نشان می‌دهیم

مثال)

$z=x+yi$

$f(z)=\bar{z}=x-yi$

$\Delta z=\Delta x+\Delta y i$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(x+\Delta x)-(y+\Delta y)i-x+yi}{\Delta x+\Delta y i} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x-\Delta y i}{\Delta x+\Delta y i}$$

1) $\Delta x\to 0 \quad \Delta y=0 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$

2) $\Delta x=0 \quad \Delta y\to 0 \qquad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y i}{\Delta y i}=-1$

حد فوق برای تابع f در هیچ نقطه‌ای موجود نیست ← f در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست

تعریف: اگر تابع f به ازای هر $z\in D$ مشتق‌پذیر باشد، می‌گوییم تابع f در D تحلیلی است.

* شرایط لازم (نه کافی) برای مشتق‌پذیری

قضیه: اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه‌ی z مشتق‌پذیر باشد آنگاه به ازای z شرایط زیر برقرار است

$u_x=v_y$

$v_x=-u_y$

اثبات - می‌دانیم حد $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ به ازای هر $\Delta z\to 0$ موجود و برابر با $f'(z)$ است. از جمله به ازای $\Delta z=\Delta x+\Delta y\, i$ که

1) $\Delta x\to 0 \qquad \Delta y=0$

2) $\Delta x=0 \qquad \Delta y\to 0$

1) $\Delta x\to 0 \qquad \Delta y=0 \qquad \Delta z=\Delta x$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=u_x+iv_x=f'(z)$$

2) $\Delta x=0 \qquad \Delta y\to 0 \qquad \Delta z=\Delta x+\Delta y\, i=\Delta y\, i$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta y\, i}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i(v(x,y+\Delta y)-v(x,y))}{\Delta y\, i}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{i}u_y}_{\text{بخش موهومی}}+\underbrace{v_y}_{\text{بخش حقیقی}}=\frac{-i^2}{i}u_y+v_y=v_y-iu_y=f'(z)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x+iv_x=f'(z)\\ v_y-iu_y=f'(z)\end{array}\right\}\longrightarrow \begin{array}{l} u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{array} \qquad (v_x=-u_y)$$

* شرط فوق را شرط لازم کوشی - ریمان برای مشتق‌پذیری تابع f در z می‌گویند

* نتیجه: اگر تابع f در ناحیه‌ی D تحلیلی باشد آن‌گاه به ازای هر $z\in D$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{array}\right. \quad (*)$$

هم‌چنین از روابط $(*)$ نتیجه می‌شود که

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$v_{xx}+v_{yy}=0$$

یعنی اگر $f=u(x,y)+iv(x,y)$ در ناحیه‌ی D تحلیلی باشد آن‌گاه u و v جواب معادله‌ی لاپلاس هستند

اثبات :

$$u_x = v_y \longrightarrow u_{xx} = v_{xy}$$

$$u_y = -v_x \longrightarrow \underline{u_{yy} = -v_{xy}}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow u_{xy} = v_{yy} \\ u_{xy} = -v_{xx} \end{array}\right\} \longrightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0$$

کاربرد: برای پیدا کردن جواب های معادله‌ی لاپلاس ، یک روش ممکن استفاده از نتیجه فوق است. به این ترتیب اگر تابع f تحلیلی باشد می‌توان مطمئن بود که u و v متناظر با آن در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کنند. مثلاً u و v متناظر با توابع تحلیلی دو تا از جواب های معادله‌ی لاپلاس را می‌دهند

مثال) بررسی شرایط کوشی ریمان

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad u_x = 2x \qquad u_y = -2y$$

$$v(x,y) = 2xy \qquad v_x = 2y \qquad v_y = 2x$$

$$u_x = v_y \ \checkmark$$

$$u_y = -v_x \ \checkmark$$

شرایط کوشی ریمان به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ برای تابع $f(z) = z^2$ برقرار است

* محاسبه‌ی مزدوج هارمونیک تابع $u(x,y)$

با داشتن تابع $u(x,y)$ ، هدف محاسبه‌ی تابع $v(x,y)$ است که شرایط کوشی ریمان را برقرار کند یعنی $u_x = v_y \quad u_y = -v_x$

$v(x,y)$ را مزدوج هارمونیک u می‌گوییم

مثال

$$u(x,y) = xy$$

$$v_y = u_x = y \longrightarrow v_y = y \longrightarrow v = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$$

$$v_x = -u_y = -x \longrightarrow \underline{v_x = -x \qquad v_x = G'(x)}$$

$$G'(x) = -x \rightarrow G(x) = -\frac{1}{2}x^2 + H(y)$$

$$v = \frac{1}{2}y^2 + G(x) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + H(y)$$

$$v_y = y + H'(y) \longrightarrow H'(y) = 0 \longrightarrow H(y) = c$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + c$$

شرایط کوشی ریمان در مختصات قطبی

$z = re^{i\theta}$

$f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$

$u_x = v_y \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$u_y = -v_x \qquad \theta = tg^{-1}\, y/x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2}$$

$\left[(tg^{-1} u)' = \frac{u'}{1+u^2} \right]$ یادآوری

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{r\cos\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\overset{r\sin\theta}{-y}}{\underset{r^2}{x^2+y^2}} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1/x}{1+y^2/x^2} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\sin\theta}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$

$$u_x = v_y \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \qquad \times\cos\theta \qquad (1)$$

$$u_y = -v_x \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} = -\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \qquad \times\sin\theta \qquad (2)$$

رابطه (۱) را در $\cos\theta$ و رابطه (۲) را در $\sin\theta$ ضرب کرده و باهم جمع می‌کنیم

$$\frac{\partial u}{\partial r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 0 = 0 + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$ شرایط کوشی ریمان در نمایش قطبی

با یک ساده سازی دیگر

جلسه هفدهم ۹۴/۱/۲۹

مثال)

$f(z) = z^2 \qquad z = re^{i\theta}$

$f(z) = r^2 e^{2i\theta} = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

$u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$

$v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta$

$u_r = 2r\cos 2\theta \qquad v_\theta = 2r^2 \cos 2\theta \qquad u_r = \frac{1}{r} v_\theta$ ✓

$v_r = 2r \sin 2\theta \qquad u_\theta = -2r^2 \sin 2\theta \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$ ✓

قضیه: اگر مشتقات جزئی u و v در نقطه‌ی z پیوسته باشند و $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ آن‌گاه تابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در نقطه‌ی z مشتق‌پذیر است.

مثال)

$u(x,y) = e^x \cos y$

$v(x,y) = e^x \sin y$

$u_x = e^x \cos y$

$u_y = -e^x \sin y$

$v_x = e^x \sin y \qquad v_y = e^x \cos y$

مشتقات جزئی حاصل ضرب نمایی و مثلثاتی هستند ← پیوسته‌اند
سینوس و کسینوس‌ها

$u_x = v_y$

$u_y = -v_x \longrightarrow$ تابع $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ به ازای هر z دلخواه تحلیلی است

خاصیت‌های توابع تحلیلی

اگر f و g در ناحیه‌ی D تحلیلی باشند، آن‌گاه به ازای هر $z \in D$ داریم

1) $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \qquad (c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g'$

2) $(fg)' = f'g + g'f$

3) $(f/g)' = ?$

$\tilde{D} = \{z \mid z \in D, g(z) \neq 0\} \qquad \forall z \in \tilde{D} \qquad (f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

4) $(f(g(z)))' = g'(z) f'(g(z))$

تحت شرایط مشتق‌پذیری $f(g(z))$

* توابع تحلیلی تام

۱) توابع چندجمله‌ای

$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$

$a_i\in\mathbb{C}$

خاصیت: چندجمله‌ای $f(z)$ به ازای هر z دلخواه تحلیلی است و داریم

$f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots+na_nz^{n-1}$

۲) تابع e^z

تعریف:

I) $\underset{x\in\mathbb{R}}{e^{ix}} := 1+(ix)+\frac{(ix)^2}{2}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\cdots$ $\quad\left(e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$

$e^{ix}=1+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\cdots+ix+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\cdots$

$i^2=-1 \to e^{ix}=\underbrace{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\cdots\cdots}_{\cos x}+\underbrace{ix-\frac{ix^3}{3!}+\frac{ix^5}{5!}-\cdots}_{i\sin x}=\cos x+i\sin x$

$\to \underline{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$

II) $e^z=e^{x+yi}=e^xe^{yi}=e^x(\cos y+i\sin y)\to e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$

* خاصیت ۱) تابع $f(z)=e^z$ به ازای هر z تحلیلی است و داریم $f'(z)=e^z$

اثبات:

اثبات تحلیلی بودن: مثال بعد از قضیه‌ی شرایط کافی

اثبات $f'(z)=e^z$

به ازای هر Δz دلخواه مقدار حد همان $f'(z)$ است $\to$ مشتق وجود دارد $\to$ f تحلیلی است

(حد متناظر یکتاست)

$\Delta z=\Delta x$

$\Delta x\to 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x+yi} - e^{x+yi}}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^{x}}{\Delta x}\right) e^{yi} = (e^{x})' e^{yi} = e^{x} e^{yi} = e^{z}$$

خاصیت ۲)

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$e^{x_1+y_1 i+x_2+y_2 i} = e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i} = e^{x_1+x_2} \boxed{e^{(y_1+y_2)i}} = e^{x_1} e^{x_2} \boxed{e^{y_1 i} e^{y_2 i}}$$

$$= e^{x_1+y_1 i} e^{x_2+y_2 i} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$* \; e^{(y_1+y_2)i} = \cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2) = \cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)$

$* \; e^{y_1 i} e^{y_2 i} = (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)$

$\to e^{(y_1+y_2)i} = e^{y_1 i} e^{y_2 i}$

۳) $\sin z$ و $\cos z$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \longrightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \longrightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

تعریف ضابطه تابع:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+yi)} + e^{-i(x+yi)}}{2} = \frac{e^{-y} e^{ix} + e^{y} e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} + i \sin x \frac{e^{-y} - e^{y}}{2}$$

$\to \cos z = \cos x \cosh y + i \sin x (-\sinh y) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$\to \cos(x+yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+yi)} - e^{-i(x+yi)}}{2i} = \frac{e^{-y} e^{ix} - e^{y} e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2i} = \cos x \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} + (i \sin x) \frac{e^{-y} + e^{y}}{2i}$$

$$= \cos x \frac{i(e^{y} - e^{-y})}{2\cancel{i}} + \sin x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

مثال)

$\sin(i) = ?$

$z = i \quad x = 0 \quad y = 1$

$\sin z = \sin 0 \cosh 1 + i \cos 0 \sinh 1 = 1 \times 1 \times \sinh 1 = i \sinh 1$

خاصیت مهم: توابع $\sin z$ و $\cos z$ تحلیلی هستند و داریم

$(\sin z)' = \cos z$

$(\cos z)' = -\sin z$

اثبات:

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

جلسه هجدهم ۹۴/۱/۳۱

۴) $\sinh z$ ، $\cosh z$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+yi} + e^{-(x+yi)}}{2} = \frac{e^x e^{yi} + e^{-x} e^{-yi}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2}$$

$$= \cos y \frac{e^x + e^{-x}}{2} + i \sin y \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+yi} - e^{-(x+yi)}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i \sin y) - e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2}$$

$$= \cos y \frac{e^x - e^{-x}}{2} + i \sin y \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \sinh x \cos y + \cosh x \sin y$$

مثال)

$\sinh(\pi + i) = ?$

$z = x + yi \longrightarrow x = \pi \quad y = 1$

$\sinh(\pi + i) = \sinh(\pi) \cos 1 + i \cosh(\pi) \sin 1$

$\sinh(1 + \pi i) = \sinh(1) \cos \pi + i \cosh(1) \sin \pi$

$= -\sinh(1)$

خاصیت - توابع $\sinh z$ و $\cosh z$ تحلیلی هستند و داریم

$$(\cosh z)' = \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^z)' + \frac{1}{2}(e^{-z})' = \frac{1}{2}e^z - \frac{1}{2}e^{-z} = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \sinh z$$

مثال:

$$(e^{-z})' \overset{?}{=} -e^{-z}$$

$$f(z) = e^z \qquad e^{-z} = f(g(z))$$

$$g(z) = -z$$

$$(e^{-z})' = g'(z)\, f'(g(z))$$

$$g'(z) = -1 \quad f'(z) = e^z \quad f'(g(z)) = e^{-z}$$

$$\Big\} \; (e^{-z})' = -1 \times e^{-z} = -e^{-z}$$

$$(\sinh z)' = \left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^z)' - \frac{1}{2}(e^{-z})' = \frac{1}{2}e^z + \frac{1}{2}e^{-z} = \cosh z$$

۵) تابع لگاریتم

$$\ln z = w = u + iv = ?$$

$$z = e^w = e^{u+iv} \qquad u, v = ?$$

$$z = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$$

$$z = re^{i\theta}$$

$$\Big\} \rightarrow e^u = r \rightarrow u = \ln r$$

$$v = \theta + 2k\pi$$

قرارداد: برای v از مقدار آرگمان اصلی یعنی θ در بازه‌ی $[-\pi, \pi)$ استفاده می‌کنیم تا تابع $\ln z$ به ازای هر z مقدار یکتا داشته باشد

$$w = \ln z = \ln r + i\theta \qquad -\pi < \theta < \pi$$

$$z = re^{i\theta}$$

$$z = e^w = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{i\theta} = re^{i\theta}$$

بنابراین تابع $\ln z$ برای $z = re^{i\theta}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\boxed{\ln z = \ln r + i\theta} \qquad -\pi < \theta < \pi$$

خاصیت ۱:

تابع $\ln z$ در کل صفحه‌ی مختلط به جز نقطه‌ی $z=0$ و نیم‌خط $\theta = \pi$ تحلیلی است و داریم

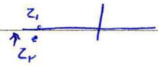
$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

اثبات :

تحلیلی بودن: ۱. در $z=0$ تابع $\ln r$ (بخش حقیقی $\ln z$) تحلیلی نیست، پس $\ln z$ در $z=0$ تحلیلی نیست

۲.

$z_1 = re^{i\pi}$ $\qquad$ $z_2 = re^{i(-\pi)^+}$



با این انتخاب درحالی که می‌توان گفت که $z_1 \to z_2$ درحالی که برای $\ln$ نقاط z_1 و z_2 داریم

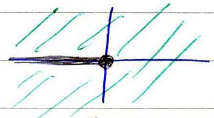
$$\left.\begin{aligned} \ln z_1 &= \ln r + i\pi \\ \ln z_2 &= \ln r + i(-\pi)^+ \end{aligned}\right\} \to \ln z_2 \not\to \ln z_1$$

با این انتخاب z_1 و z_2 پیوسته نبودن تابع $\ln$ روی نیم‌خط $\theta=\pi$ اثبات می‌شود و درنتیجه تابع $\ln$ روی $\theta=\pi$ تحلیلی هم نیست

هم‌چنین در نقاط تحلیلی داریم

$w = \ln z$

$$z=e^w \to dz = e^w dw \to \frac{dw}{dz} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$



ناحیه تحلیلی تابع $\ln z$

خاصیت ۲:

$c \in \mathbb{C}$

$$z^c = (e^{\ln z})^c = e^{c \ln z}$$

مثال:

$i^i = ?$ $\qquad$ $i^i = (e^{\ln i})^i = e^{i \ln i}$

$\ln i = ?$

$$i = 1e^{\frac{\pi}{2}i} \to \ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$$

$$e^{i\ln i} = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}} \qquad \underline{i^i = e^{i\ln i} = e^{-\pi/2}}$$

جلسه نوزدهم ۹۴/۲/۵

فصل ۱۷: نگاشت های تحلیلی

تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر می گیریم. با این تابع هر نقطه ی $z=x+yi$ به نقطه $w=u+iv$ تصویر می شود

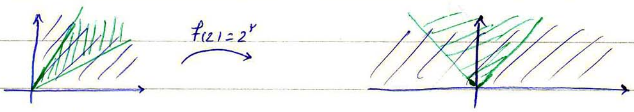
از دید هندسی هر نقطه به مختصات (x,y) به نقطه ی (u,v) نگاشته می شود. در این بخش هدف بررسی تصویر چند نگاشت تحلیلی مهم است.

۱) $f(z)=z^2$

$z=re^{i\theta}$

$z^2=\underbrace{r^2}_{\bar r}e^{2i\theta}$ $\qquad \bar r=r^2 \qquad \bar\theta=2\theta$

I)



$z=x+yi$

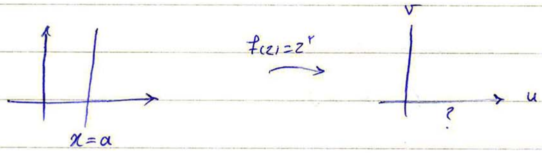
$0\leq r<\infty \longrightarrow 0\leq \bar r<\infty$

$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \qquad 0\leq\bar\theta\leq\pi$

$\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}\longrightarrow\frac{\pi}{3}\leq\bar\theta\leq\frac{2\pi}{3}$

$0\leq\bar r<\infty$

II)

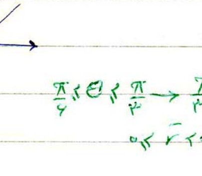


$z=a+yi \qquad f(z)=f(x+yi)=x^2-y^2+2xyi$

$-\infty<y<\infty \qquad f(a+yi)=a^2-y^2+2ayi$

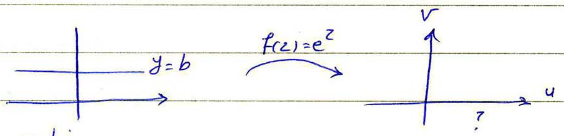
$u=a^2-y^2$

$v=2ay \longrightarrow y=\frac{v}{2a} \longrightarrow u=a^2-\left(\frac{v}{2a}\right)^2$



(۳ $f(z)=e^z$

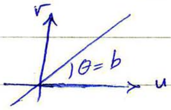
I)



$z = x+bi$

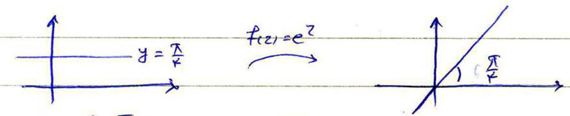
$f(z) = e^z = e^{x+bi} = e^x(\cos b + i\sin b)$ $\quad u = e^x\cos b \quad v = e^x \sin b$

$e^x = \dfrac{u}{\cos b} = \dfrac{v}{\sin b} \longrightarrow v = \tan b \, u$



$\tan\theta = \tan b \longrightarrow \theta = b$

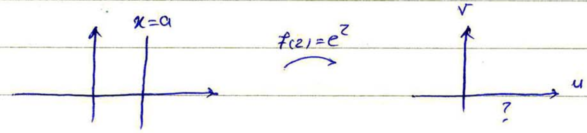
مثال) $b = \frac{\pi}{4}$



$u = e^x \sqrt{\tfrac{2}{2}} > 0 \qquad -\infty < x < \infty$

$v = e^x \sqrt{\tfrac{2}{2}} > 0$

II)



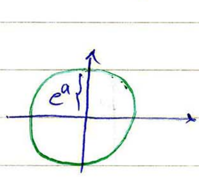
$z = a + yi \qquad e^z = e^a\cos y + i e^a \sin y \longrightarrow u = e^a \cos y$

$-\infty < y < \infty \qquad v = e^a \sin y$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \longrightarrow \left(\dfrac{u}{e^a}\right)^2 + \left(\dfrac{v}{e^a}\right)^2 = 1 \longrightarrow u^2 + v^2 = e^{2a}$

($(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \leftarrow$ دایره به مرکز $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ و شعاع R)

$u^2+v^2=e^{2a}$ معادله دایره به شعاع e^a و مرکز مبدأ است. پس داریم

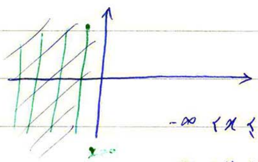


کاربرد ۲: در بسیاری از مسائل کاربردی می‌توان قبل از حل یک مسأله PDE ، ناحیه‌ی حل را به یک ناحیه‌ی ساده تبدیل کرد ، PDE را در ناحیه‌ی ساده‌ی جدید حل کرد و سپس با تبدیل نگاشت وارون جواب را در ناحیه‌ی اصلی به‌دست آورد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال

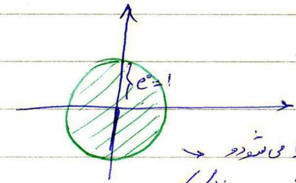
$w_{xx} + w_{yy} = 0$

$f(z) = e^z$



$-\infty < x < 0$

$-\infty < y < \infty$



$e^0 = 1$

برای $x=0$ دایره به شعاع ۱ می‌شود و

هرچه x کوچکتر می‌شود شعاع دایره نیز کوچکتر

می‌شود و خط $\underset{a\to-\infty}{x=a}$ به دایره به شعاع صفر نگاشته می‌شود.

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{vmatrix}$$

$w_{xx} + w_{yy} = 0 \qquad u = e^x \cos y \qquad v = e^x \cos y$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} e^x \cos y + \frac{\partial w}{\partial v} e^x \sin y$$

$w_{uu} + w_{vv} = 0$

به همین ترتیب $\frac{\partial w}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ را محاسبه می‌کنیم. در نهایت داریم

(دلیل این که معادله تغییر نکرد این است که u و v در معادله لاپلاس صدق می‌کنند)

$w_{uu} + w_{vv} = 0 \longrightarrow$ این مسأله در دستگاه قطبی حل می‌شود

$$\rightarrow w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta} = 0 \qquad w(r,\theta) = ?$$

$r = \sqrt{u^2+v^2}$

$\theta = \tan^{-1} v/u \longrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \bar{w}(u,v) \\ u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{matrix}\right\} \longrightarrow \tilde{w}(x,y)$$

مرور - مراحل کلی :

۱) تبدیل ناحیه به فضای u و v

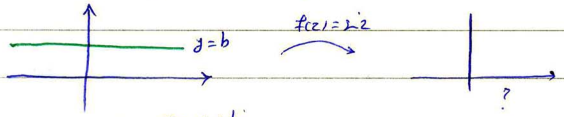
۲) تبدیل PDE به فضای u و v با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای (اگر نگاشت تحلیلی و PDE معادله‌ی لاپلاس باشد، در این مرحله همان PDE لاپلاس در فضای u و v را داریم)

۴) حل PDE جدید در ناحیه‌ی به دست آمده و رسیدن به جواب $w(u,v)$

۴) u و v برحسب x و y و محاسبه‌ی جواب برحسب x و y ، $\tilde{w}(x,y)$

$f(z) = \sin z$ (۳

$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

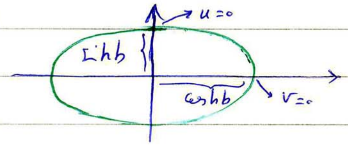


$z = x + bi$

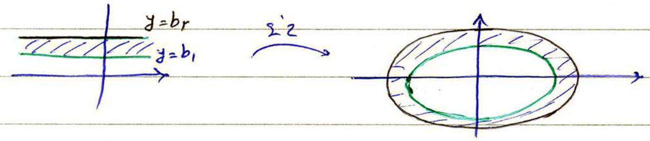
$-\infty < x < \infty$

$u = \sin x \cosh b$

$v = \cos x \sinh b \longrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \left(\frac{u}{\cosh b}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh b}\right)^2 = 1$



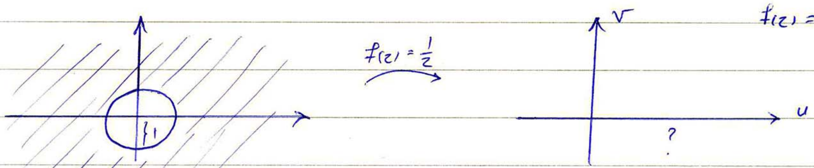
مثال)



جلسه بیستم ۹۴,۲,۷

$f(z) = \frac{1}{z}$ (۴

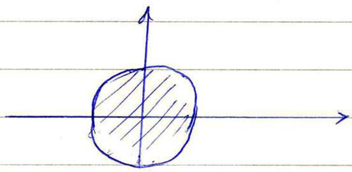
I)



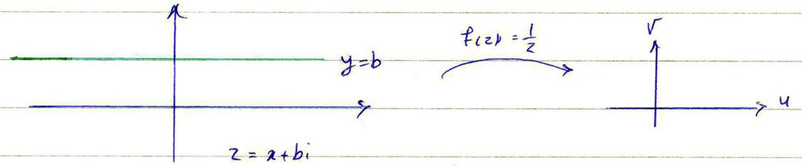
$z = re^{i\theta} \qquad r \geq 1 \qquad -\pi < \theta \leq \pi \qquad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

$\bar{r} = \frac{1}{r} \longrightarrow r \geq 1 \longrightarrow 0 < \bar{r} \leq 1$

$\bar{\theta} = -\theta \longrightarrow -\pi < \theta \leq \pi \longrightarrow -\pi \leq \bar{\theta} < \pi$



II)



$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{1}{x+yi}\,\frac{x-yi}{x-yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\,i$$

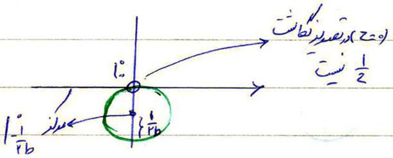
$$z=x+bi \;\rightarrow\; f(z)=\frac{x}{x^2+b^2}-\frac{b}{x^2+b^2}\,i \qquad u=\frac{x}{x^2+b^2} \qquad v=\frac{-b}{x^2+b^2}\;(*)$$

$$u^2=\frac{x^2}{(x^2+b^2)^2} \qquad v^2=\frac{b^2}{(x^2+b^2)^2} \qquad u^2+v^2=\frac{1}{x^2+b^2}\overset{(*)}{=}-\frac{v}{b}$$

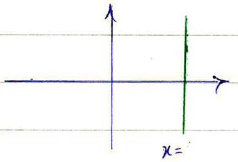
$$u^2+v^2+\frac{v}{b}=0 \qquad u^2+\left(v+\frac{1}{2b}\right)^2-\frac{1}{4b^2}=0$$

$$u^2+\left(v+\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{1}{4b^2}\;\rightarrow$$ معادله دایره به مرکز $\left|{}^{\,0}_{-\frac{1}{2b}}\right.$ و شعاع $\frac{1}{2b}$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$



III)



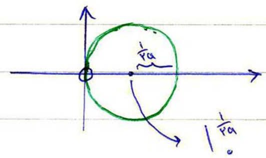
$$z=a+yi \qquad f(z)=\frac{a}{a^2+y^2}-\frac{y}{a^2+y^2}\,i$$

$$u=\frac{a}{a^2+y^2}\;(**) \qquad u^2=\frac{a^2}{(a^2+y^2)}$$

$$v=-\frac{}{a^2+y^2} \qquad v^2=\frac{y^2}{(a^2+y^2)^2}$$

$$u^2+v^2=\frac{1}{a^2+y^2}\overset{(**)}{=}\frac{u}{a}$$

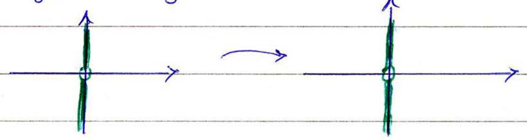
$$u^2+v^2=\frac{u}{a}\;\rightarrow\; u^2-\frac{u}{a}+v^2=0\;\rightarrow\;\left(u-\frac{1}{2a}\right)^2+v^2=\frac{1}{4a^2}\;\rightarrow\;\frac{1}{2a}$$ و شعاع $\left|{}^{\frac{1}{2a}}_{\,0}\right.$ معادله‌ی دایره به مرکز



نکته: در ۲ حالت قبلی محاسبات با فرض $b\neq 0$ و $a\neq 0$ انجام شده است. به عنوان نمونه در حالت III به ازای $a=0$ داریم:

$z = yi \qquad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{yi} = \frac{i}{yi^2} = -\frac{i}{y}$

$u = 0 \qquad v = -\frac{1}{y}$

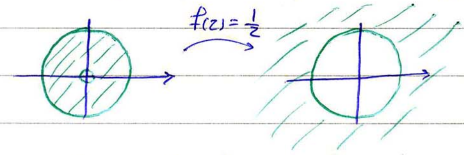


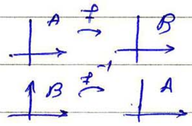
$-\infty < y < \infty \quad \to -\infty < -\frac{1}{y} < \infty \qquad -\frac{1}{y} \neq 0$

$y \neq 0$

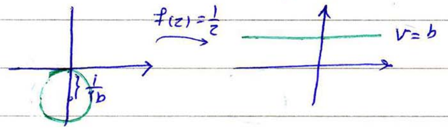
نکته: با توجه به این که وارون نگاشت $\frac{1}{z}$ برابر با خود تابع $\frac{1}{z}$ است، بنابراین در عکس تبدیل‌های بالا هم با این نگاشت اتفاق می‌افتد

I')

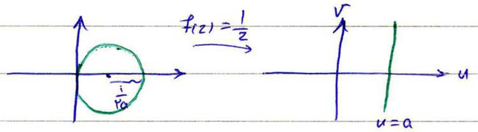




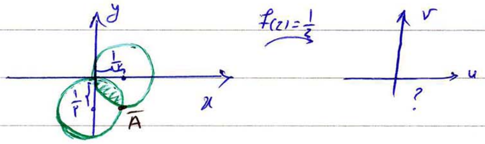
II')

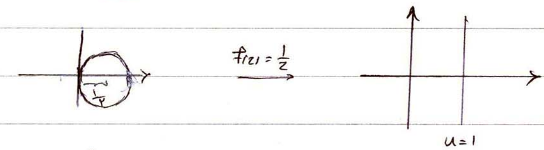


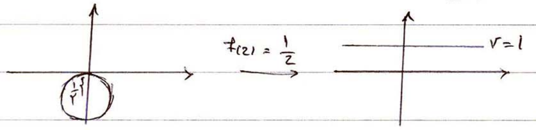
III')



مثال)







$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \qquad\qquad x^2 + y^2 - x = 0$

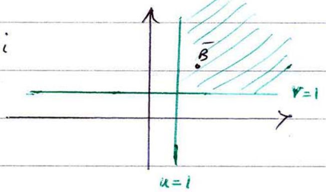
$\longrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \longrightarrow y + x = 0 \to y = -x \to 2x^2 - x = 0 \to x(2x-1) = 0 \to x = \frac{1}{2}$

$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \qquad\qquad x^2 + y^2 + y = 0$

$A = \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$

$\bar{B}$ را با مختصات $\left|\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{smallmatrix}\right.$ انتخاب می‌کنیم تا محدوده جواب تصویر را بیابیم ($\bar{B}$ قطعاً داخل محدوده بین ۲ دایره است)

$$\left.\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \\ r &= \sqrt{\frac{1}{16}\times 2} = \sqrt{\frac{1}{8}} \\ \theta &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad \bar{B} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \longrightarrow f(\bar{B}) = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$



۵) نگاشت هموگرافیک $\quad f(z) = \dfrac{az+b}{z+c}$

قضیه: نگاشت یکتای $f(z) = \dfrac{az+b}{z+c}$ وجود دارد که به نقاط به ترتیب z_1 ، z_2 و z_3 را به w_1 ، w_2 و w_3 تصویر می‌کند. این نگاشت $w = f(z)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

مثال)

	z		w	
z_1	i	$\longrightarrow$	1	w_1
z_2	0	$\longrightarrow$	1	w_2
z_3	2	$\longrightarrow$	0	w_3

$$\frac{(w-1)(i-0)}{(w-0)(i-1)} = \frac{(z-i)(0-2)}{(z-2)(0-i)}$$

$$\longrightarrow \frac{w-1}{w}\,\frac{i}{i-1} = \frac{z-i}{z-2}\,\frac{2}{i} \longrightarrow \dots \quad w = \frac{z-2}{-(1-2i)z+2i}$$

جلسه بیست و یکم ۹۴/۲/۱۴

مثال)

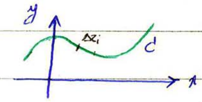
	z	w	
z_1	i	∞	w_1
z_2	0	1	w_2
z_3	∞	i	w_3

$$\underset{w_1\to\infty}{\frac{(w-w_1)(1-i)}{(w-i)(1-w_1)}} = \underset{z_3\to\infty}{\frac{(z-i)(0-z_3)}{(z-z_3)(0-i)}}$$

$$\underset{w_1\to\infty}{\frac{1-i}{w-i}\,\frac{w-w_1}{1-w_1}} = \underset{z_3\to\infty}{\frac{z-i}{-i}\,\frac{-z_3}{z-z_3}} \longrightarrow \frac{1-i}{w-i} = \frac{z-i}{-i}$$

$$w = \frac{-i(1-i)}{z-i} + i = \frac{-i-1}{z-i} + i = \frac{iz-i}{z-i}$$

فصل ۱۴: انتگرال مختلط

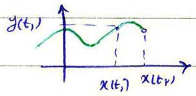


خم هموار C و تابع پیوسته‌ی $f(z)$ را در نظر می‌گیریم. هدف محاسبه‌ی $\int_c f(z)dz$ است

$$\int_c f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i$$

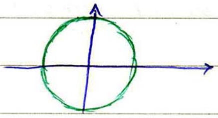
محاسبه‌ی $I = \int_c f(z)dz$

روش اول: پارامتری کردن خم C



$$C:\ z(t) = x(t) + y(t)i \qquad a \le t \le b$$

مثال)



$x = \cos t$ $\quad 0 \le t \le 2\pi \longrightarrow C:\ z(t) = \cos t + i\sin t$

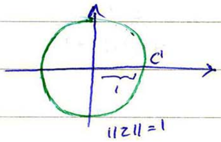
$y = \sin t$

$z := z(t)$

$I = \int f(z(t))\, dz(t) = ?$

$dz(t) = z'(t)dt = (x'(t) + iy'(t))dt \qquad I = \int_a^b f(z(t))\,(x'(t) + iy'(t))dt$

مثال)



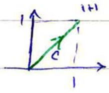
$$I = \int_c \frac{dz}{z} = ?$$

$z(t) = \cos t + i\sin t = e^{it} \qquad dz(t) = z'(t)dt = ie^{it}dt$

$0 \le t \le 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

مثال)



$$I = \int_c z\,dz$$

$C:\ z(t) = x(t) + y(t)i = t + it \qquad dz(t) = z'(t)dt = (1+i)dt$

$0 \le t \le 1$

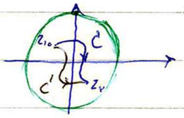
$$I=\int_0^1 (t+it)(1+i)\,dt=(1+i)^2\int_0^1 t\,dt=(1+i)^2\frac{1}{2}=\frac{2i+1-1}{2}=i$$

روش دوم برای محاسبه ی I (مخصوص توابع تحلیلی f)

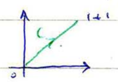
قضیه: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه ی D تحلیلی باشد آنگاه تابع $F(z)$ وجود دارد به طوری که $F'(z)=f(z)$ $\quad \forall z\in D$

همچنین به ازای هر خم C با ابتدا و انتهای z_1 و z_2 در ناحیه ی D داریم

$$\int_c f(z)\,dz=F(z_2)-F(z_1)$$



مثال)



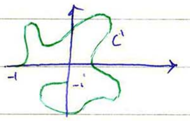
$f(z)=z \qquad I=\int z\,dz \qquad F(z)=\frac{z^2}{2}$

$(F'(z)=f(z))$

$D=\mathbb{C}\rightarrow$ زیرا تابع f در کل $\mathbb{C}$ تحلیلی است

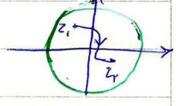
$$I=F(1+i)-F(0)=\frac{(1+i)^2}{2}-\frac{0}{2}=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{1-1+2i}{2}=i \checkmark$$

مثال)



$$I=\int_c e^z\,dz=?$$

$D=\mathbb{C} \qquad f(z)=e^z \qquad F(z)=e^z$



$$I=F(-i)-F(-1)=e^{-i}-e^{-1}=\cos 1-i\sin 1-e^{-1}=(\cos 1-e^{-1})-i\sin 1$$

* اگر خم پیچیده بود حتماً باید از این قضیه استفاده کرد (قبلاً در این سوال نمی شد از روش پارامتری کردن استفاده کرد)

کران انتگرال

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right|\leq B$$

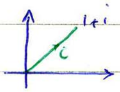
اگر تابع f پیوسته و خم C هموار باشد، می توان کران بالایی برای اندازه ی $\int f(z)dz$ به دست آورد. اگر طول خم C برابر با L و اندازه ی تابع f به ازای تمام نقاط خم کم‌تر از M باشد آنگاه

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right|\leq ML$$

اثبات:

$$\left|\int_c f(z)dz\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta z_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty}|f(\xi_i)\Delta z_i| \le M\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}|\Delta z_i|}_{L}$$

مثال)



$f(z)=z$

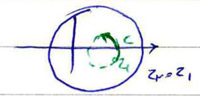
$\forall z|_{on\ c}$ $\quad |f(z)|=|z|\le|1+i|=\sqrt{2}$ $\quad M=\sqrt{2}$

طول خم $\|C\|=\sqrt{2}$ $\quad L=\sqrt{2} \to \left|\int_c f(z)dz\right|\le 2$ $\quad \int_c f(z)dz = i$

جلسه بیست و دوم ۹۴/۲/۱۹

نتایج به دست آمده از روش ۲

نتیجه ۱: اگر f در D تحلیلی باشد به ازای هر خم بسته‌ی c در D داریم $\quad \int_c f(z)dz=0$



اثبات $\quad \int_c f(z)dz = F(z_2)-F(z_1) = F(z_1)-F(z_1)=0$

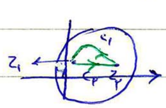
اگر خم c بسته باشد انتگرال روی خم را به صورت $\oint_c f(z)dz$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲: اگر f روی ناحیه‌ی ساده‌ی D (بدون حفره) تحلیلی باشد به ازای هر خم c با ابتدا و انتهای z_1 و z_2 داریم

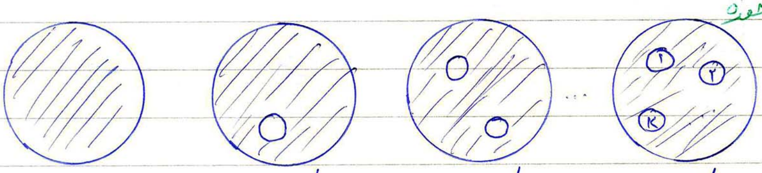
$$\int_c f(z)dz = F(z_2)-F(z_1)$$

پس اگر c_1 و c_2 دو خم در ناحیه‌ی D با ابتدا و انتهای z_1 و z_2 باشند داریم

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_{c_2} f(z)dz = F(z_2)-F(z_1)$$



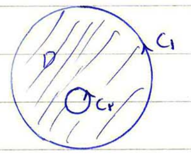
نواحی دارای حفره



ساده   دوگانه   سه گانه $k+1$ گانه

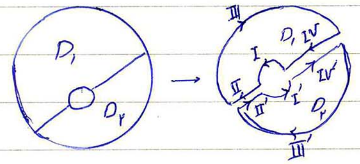
$(k+1)$ - Pieces

قضیه: اگر f در ناحیه‌ی دوگانه‌ی D تحلیلی باشد، آن‌گاه داریم



$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

اثبات:



D_1 و D_2 دو ناحیه‌ی ساده هستند که تابع f روی آن‌ها تحلیلی است. پس از نتیجه‌ی 1 داریم:

$$\oint_{\underbrace{I+II+III+IV}_{\text{ناحیه ساده بسته}}} f(z)\,dz = 0 \qquad \oint_{I'+II'+III'+IV'} f(z)\,dz = 0$$

← نتیجه ۱

$$\rightarrow I + II + III + IV \overset{(1)}{=} 0 \rightarrow$$ منظور انتگرال روی این نواحی صفر است

$$I' + II' + III' + IV' \overset{(2)}{=} 0 \qquad II = -II' \qquad IV = -IV'$$

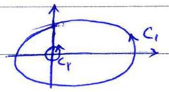
$$(2) \rightarrow I' - II + III' - IV' = 0$$

$$(1) \rightarrow II + IV = -I - III \;\Big\}\rightarrow \underbrace{I + I'}_{C_2} = \underbrace{-III - III'}_{C_1} \rightarrow \oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

$$C_1 \rightarrow -(III + III')$$

← چون جهتشان قرینه است

مثال:



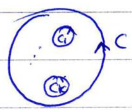
$f(z)$ در ناحیه‌ی دوگانه بین C_1 و C_2 تحلیلی است.

$$I=\oint_{C_1}\frac{z^2+5}{z}\,dz=\oint_{C_2}\frac{z^2+5}{z}\,dz=?$$

$C_2:\ \|z\|=r \qquad z=re^{it} \qquad 0\le t\le 2\pi$

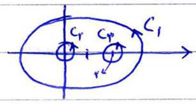
$$I=\int_0^{2\pi}\frac{r^2e^{2it}+5}{re^{it}}\,rie^{it}\,dt=i\int_0^{2\pi}(r^2e^{2it}+5)\,dt=\frac{i}{2i}r^2e^{2it}+5it\Big]_0^{2\pi}=0+10i\pi=10\pi i$$

تعمیم: اگر f در ناحیه‌ی $k+1$ گانه تحلیلی باشد داریم



$$\oint_C f(z)\,dz=\sum_{i=1}^{k}\oint_{C_i} f(z)\,dz$$

مثال)



$$I=\oint_{C_1}\frac{7z^2-6}{z^2-2z}\,dz$$

$C_2:\ \|z\|=r \qquad z=re^{it} \qquad dz=rie^{it}\,dt$

$$\oint_{C_2}\frac{7z^2-6}{z^2-2z}\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{7r^2e^{2it}-6}{r^2e^{2it}-2re^{it}}\,rie^{it}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{7r^2e^{2it}-6}{re^{it}-2}\,i\,dt$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{7r^2e^{2it}-3re^{it}+3re^{it}-6}{re^{it}-2}\,dt=i\int_0^{2\pi}\left(\frac{7r^2e^{2it}-3re^{it}}{re^{it}-2}+3\right)dt$$

$$=\underbrace{i\int_0^{2\pi}\frac{7r^2e^{2it}-3re^{it}}{re^{it}-2}\,dt}_{I^*}+6\pi i \longrightarrow I^*=\int_1^1\frac{7r^2u-3r}{ru-2}\,\underbrace{ie^{it}\,dt}_{du}=0$$

$e^{it}=u$

$\longrightarrow \oint_{C_2} f(z)\,dz=6\pi i$ از طریق مشابه $\oint_{C_3} f(z)\,dz=22\pi i$ راهنمایی برای پارامتری کردن $(z-2=re^{it})$

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz=\oint_{C_2} f(z)\,dz+\oint_{C_3} f(z)\,dz=28\pi i$$

فرمول انتگرال کوشی

اگر تابع f در ناحیه‌ی ساده‌ی D تحلیلی باشد به ازای هر نقطه‌ی $z_0 \in D$ و خم بسته‌ی c حول z_0 داریم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

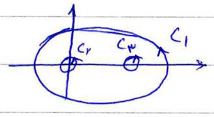
تعمیم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = 2\pi i\, f'(z_0)$$

$$\vdots$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = 2\pi i\, \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

مثال ۱)



$$\oint_{C_1} \frac{7z^2-6}{z^2-2z}\,dz$$

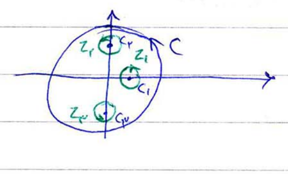
$$\oint_{C_2} \frac{\frac{7z^2-6}{z-2}}{z}\,dz = \left.\frac{7z^2-6}{z-2}\right|_{z=0} \times 2\pi i = 6\pi i$$

$$\oint_{C_3} \frac{\frac{7z^2-6}{z}}{z-2}\,dz = \left.\frac{7z^2-6}{z}\right|_{z=2} \times 2\pi i = 22\pi i \quad \longrightarrow \quad \oint_{C_1} f(z)\,dz = 28\pi i$$

جلسه بیست و سوم ۹۴/۲/۲۱

مثال ۲)

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)}\,dz$$



$$z_1 = 1 \qquad z^2+4=0 \rightarrow z_2 = 2i \qquad z_3 = -2i$$

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$

1) $\oint_{C_1} = ?$ $\qquad f(z) = \dfrac{\overbrace{e^z/(z^2+4)}^{g(z)}}{(z-1)^2}$

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_1} \frac{e^z/(z^2+4)}{(z-1)^2}\,dz \overset{k=1}{=} 2\pi i\, \frac{g'(1)}{1!}$$

$$g(z) = \frac{e^z}{z^2+4} \qquad g'(z) = \frac{e^z(z^2+4) - 2ze^z}{(z^2+4)^2}$$

$$g'(z) = \frac{e^z(z^2+4) - 2ze^z}{(z^2+4)^2} \longrightarrow g'(1) = \frac{e \times 5 - 2e}{25} = \frac{3e}{25}$$

$$\longrightarrow \oint_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i \,\frac{3e}{25} = \frac{6\pi e i}{25}$$

۲) $\oint_{C_2} = ?$

حول ۲i

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z-2i)(z+2i)} = \frac{\overbrace{e^z/(z-1)^2(z+2i)}^{g(z)}}{z-2i}$$

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz \overset{k=0}{=} \frac{2\pi i\, g(2i)}{0!} = 2\pi i\, g(2i)$$

$$g(2i) = \frac{e^{2i}}{(2i-1)^2(4i)} = \frac{\cos 2 + i\sin 2}{(-4+1-4i)4i} \longrightarrow \oint_{C_2} f(z)\,dz = \frac{\cos 2 + i \sin 2 \times 2\pi i}{(-3-4i)4i}$$

$$\longrightarrow \oint_{C_2} f(z)\,dz = \frac{\pi\,\cos 2 + i\sin 2}{-6-8i}$$

۳) $\oint_{C_3} = ?$

$$f(z) = \frac{\overbrace{e^z/(z-1)^2(z-2i)}^{g}}{(z+2i)}$$

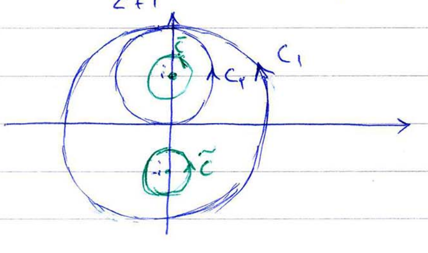
$$\oint_{C_3} f(z)\,dz = 2\pi i\, g(-2i) = 2\pi i \,\frac{e^{-2i}}{(-2i-1)^2(-4i)}$$

$$\oint_{C} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3} = \frac{6\pi e i}{25} + \frac{\pi\,\cos 2 + i\sin 2}{-6-8i} + 2\pi i\,\frac{e^{-2i}}{(-2i-1)^2(-4i)}$$

مثال)

$C_1 : \|z\| = 2 \qquad C_2 : \|z-i\| = 1$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1} \qquad I_1 = \oint_{C_1} f(z)\,dz \qquad I_2 = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$



$$z^2+1=0 \longrightarrow z_1 = i \qquad z_2 = -i$$

$$I_1 = \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{\bar{C}} + \oint_{\tilde{C}} \qquad\qquad I_2 = \oint_{C_2} f(z)dz = \oint_{\bar{C}}$$

$$\oint_{\bar{C}} f(z)dz = \oint_{\bar{C}} \frac{\sin z/z+i}{z-i}\, dz \overset{K=0}{=} 2\pi i \left.\frac{\sin z}{z+i}\right|_{i} = 2\pi i\, \frac{\sin i}{2i} = \pi \sin i$$

$$\oint_{\tilde{C}} f(z)dz = \oint_{\tilde{C}} \frac{\sin z/z-i}{z+i}\, dz = 2\pi i \left.\frac{\sin z}{z-i}\right|_{-i} = 2\pi i\, \frac{\sin(-i)}{-2i} = -\pi \sin(-i)$$

$$I_1 = \oint_{\bar{C}} + \oint_{\tilde{C}} = \pi \sin i - \pi \sin(-i)$$

$$I_2 = \oint_{\bar{C}} = \pi \sin i$$

$$\sin(x+yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\sin i = 0 + i \times 1 \times \sinh 1 = i \sinh 1 \qquad \sin(-i) = -i \sinh 1$$

$$I_1 = \pi \times i \sinh 1 - \pi(-i \sinh 1) = 2\pi i \sinh 1 \qquad\qquad I_2 = \pi i \sinh 1$$

فصل ۱۵ سری‌های مختلط

سری‌های توانی: سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ را یک سری توانی حول z_0 می‌گوییم. این سری در صورت همگرایی به تابعی از z همگراست.

تعریف: اگر سری $\sum a_n (z-z_0)$ به ازای هر z در ناحیه‌ی $\|z-z_0\| < R$ همگرا باشد و به ازای هیچ z ای در ناحیه‌ی $\|z-z_0\| > R$ همگرا نباشد R را شعاع همگرایی سری می‌گوییم.

قضیه: R (شعاع همگرایی سری $(z-z_0)^n$ $\sum a_n$) از روابط زیر قابل محاسبه است

$$1)\ R = \lim \sqrt[n]{\|a_n\|} \qquad\qquad 2)\ R = \lim_{n\to\infty} \left\|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\|$$

مثال)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$a_n = 1 \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left\|\frac{1}{1}\right\| = 1 \qquad z_0 = 0 \longrightarrow \|z\| < 1$$

سری‌های توانی معروف

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \|z\|<1$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) = e^z \qquad \forall z\in\mathbb{C} \qquad R=\infty$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z$

۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$

۵) $\ln(1-z)=?$ $\qquad \ln(1-z) = -\int \frac{dz}{1-z} = -\int (1+z+\dots)\,dz = -z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\dots$

$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad \|z\|<1$

مثال)

$\frac{1}{2-z} \qquad \|z\|<2, \quad z_0=0$

$t=\frac{z}{2} \qquad \|t\|<1$

$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$

$\frac{1}{2-z} \qquad \|z-1\|<1$

$t=z-1 \qquad \|t\|<1$

$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$

جلسه بیست و چهارم ۹۳/۲/۲۸

خواص سری‌های توانی

I) مشتق: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ به ازای هر z در ناحیه‌ی $\|z-z_0\|<R$ به تابع $f(z)$ همگرا باشد، آن‌گاه:

۱) به ازای هر z در ناحیه‌ی $\|z-z_0\|<R$ تابع f تحلیلی است.

۲) سری $\sum n a_n (z-z_0)^{n-1}$ به ازای هر z در ناحیه‌ی فوق به $f'(z)$ همگراست.

II) انتگرال: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ به ازای هر z در $\|z-z_0\|<R$ به $f(z)$ همگرا باشد آن‌گاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ به تابع $\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,dz^*$ همگراست.

مثال)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \|z\|<1$$

$$\longrightarrow -\ln(1-z^*)\Big]_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} \longrightarrow \ln(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} \qquad \|z\|<1$$

III) ضرب و تقسیم: شبیه به حالت حقیقی دو سری مانند دو چندجمله‌ای جمله به جمله در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌شوند.

مثال ۱)

$$f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2} \qquad \|z\|<1$$

$$f_1(z) = \sin z \qquad f_2(z) = \frac{1}{z^2+1} \longrightarrow f(z) = f_1(z)\, f_2(z)$$

$$f_1(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = (1 - z^2 + z^4 - \dots)$$

$$-z^2 = t$$

$$f(z) = f_1(z)\, f_2(z) = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)\left(1 - z^2 + z^4 - \dots\right)$$

$$= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) + \left(-z^3 + \frac{z^5}{3!} - \frac{z^7}{5!} + \dots\right) + \left(z^5 - \frac{z^7}{3!} + \frac{z^9}{5!} - \dots\right)$$

جلسه بیست و چهارم ۹۳/۲/۲۸

خواص سری‌های توانی

I) مشتق: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ به ازای هر z در ناحیه $\|z-z_0\|<R$ به تابع $f(z)$ همگرا باشد، آنگاه:

۱) به ازای هر z در ناحیه $\|z-z_0\|<R$ تابع f تحلیلی است.

۲) سری $\sum n a_n (z-z_0)^{n-1}$ به ازای هر z در ناحیه فوق به $f'(z)$ همگراست.

II) انتگرال: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ به ازای هر z در $\|z-z_0\|<R$ به $f(z)$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$ به تابع $\int_{z_0}^{z} f(z^*)\,dz^*$ همگراست.

مثال)

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \|z\|<1$$

$$\longrightarrow -\ln(1-z^*)\Big]_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} \longrightarrow \ln(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} \qquad \|z\|<1$$

III) ضرب و تقسیم: شبیه به حالت حقیقی دو سری مانند دو چندجمله‌ای جمله به جمله در هم ضرب یا بر هم تقسیم می‌شوند.

مثال ۱)

$$f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2} \qquad \|z\|<1$$

$$f_1(z) = \sin z \qquad f_2(z) = \frac{1}{z^2+1} \longrightarrow f(z) = f_1(z)\, f_2(z)$$

$$f_1(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = (1 - z^2 + z^4 - \dots)$$

$$-z^2 = t$$

$$f(z) = f_1(z)\, f_2(z) = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)\left(1 - z^2 + z^4 - \dots\right)$$

$$= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) + \left(-z^3 + \frac{z^5}{3!} - \frac{z^7}{5!} + \dots\right) + \left(z^5 - \frac{z^7}{3!} + \frac{z^9}{5!} - \dots\right)$$

$$= z - \frac{7}{6} z^3 + \frac{47}{40} z^5 + \cdots$$

مثال ۲) $f(z) = \tan z$

$$f_1(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \qquad f_2(z) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots$$

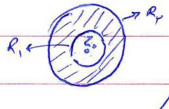
$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \longrightarrow \tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15} z^5 + \cdots$$

ارتباط توابع تحلیلی و غیر تحلیلی از طریق سری ها

سری تیلور: اگر تابع f در ناحیه ی $\|z - z_0\| < R$ تحلیلی باشد آنگاه دارای سری تیلور با فرم کلی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)$ است که در آن

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

C خم بسته ای شامل نقطه ی z_0 در درون ناحیه ی $\|z - z_0\| < R$



سری لوران: چنانچه تابع f در ناحیه ی بین دو دیسک $\|z - z_0\| = R_1$ و $\|z - z_0\| = R_2$ تحلیلی باشد

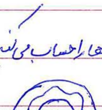
در این صورت سری لوران تابع f به ازای هر z در ناحیه ی فوق به f همگرا است. سری لوران f حول z_0 به فرم کلی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

است که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z - z_0)^{n-1} dz$$

معمولا این گونه است که ما سری را داریم و از روی آن انتگرال ها را حساب می کنیم



C خم بسته ای به حول z_0 و درون ناحیه ی تحلیلی.

مثال ۱) $f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \|z\| > 1 \qquad t = \frac{1}{z} \rightarrow \|t\| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{-z(1 - \frac{1}{z})} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - 1/z} = -t \frac{1}{1-t} = -t(1 + t + t^2 + \cdots) = -t - t^2 - t^3 - \cdots$$

$$= -\frac{1}{z} - \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{z}\right)^3 - \cdots$$

مثال)

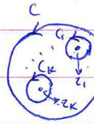
$$g(z) = z^2 e^{1/z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+2}$$

سری لوران تابع g حول $z_0 = 0$

تعریف: مقدار b_1 در سری لوران تابع f حول z_0 را مانده‌ی تابع f در z_0 می‌نامیم و با $\underset{z=z_0}{Res}\, f(z)$ نشان می‌دهیم. (نظریه مانده‌ها)

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-z_0)^{n-1} dz \rightarrow b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

توجه: اگر تابع f در تمام نقاط درون خم C به جز نقاط $z_1, \dots, z_k$ تحلیلی باشد، برای محاسبه‌ی $\oint_C f(z)dz$ داریم:



$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{C_i} f(z)dz$$

هم‌چنین از تعریف مانده داریم:

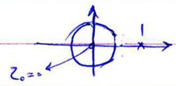
$$\oint_{C_i} f(z)dz = 2\pi i \underset{z=z_i}{Res}\, f(z) \longrightarrow \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \underset{z=z_i}{Res}\, f(z) \quad (*)$$

← قضیه اساسی مانده‌ها

در صورت محاسبه شدن مقادیر مانده مقدار $\oint_C f(z)dz$ از رابطه‌ی $(*)$ به دست می‌آید. رابطه‌ی $(*)$ را رابطه‌ی اساسی مانده می‌گویند

مثال)

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} \qquad \|z\| = \frac{1}{2}$$



$$\oint_{\|z\|=\frac{1}{2}} f(z)dz = 2\pi i \underset{z=0}{Res}\, f(z) \qquad \underset{z=0}{Res}\, f(z) = ? \longrightarrow$$ سری لوران

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} \overset{(\|z\|<1 \text{ در ناحیه})}{=} \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}(1+z+z^2+\dots) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

b_1 ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در سری لوران $= 1$

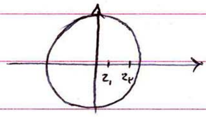
$$\underset{z=0}{Res}\, f(z) = 1 \rightarrow \oint_C = 2\pi i$$

جلسه بیست و پنجم ۹۴/۳/۴

مثال) (با استفاده از سری لوران)

$f(z) = \frac{-2z+3}{(z-1)(z-2)}$ $\quad |z| = 3$

$z_1 = 1 \quad z_2 = 2$



$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i(\underset{z=1}{\text{Res}}\, f(z) + \underset{z=2}{\text{Res}}\, f(z))$$

$$\underset{z=1}{\text{Res}}\, f(z) = ?$$

$$f(z) = -\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\right) \qquad \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{-2z+3}{(z-1)(z-2)}$$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} \longrightarrow \text{تابع تحلیلی حول } z=1 \text{ سری تیلور دارد} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

$$\underset{z=2}{\text{Res}}\, f(z) = -1 \longrightarrow \oint_c = 2\pi i(\underset{z=1}{\text{Res}} + \underset{z=2}{\text{Res}}) = 2\pi i \times (-2) = -4\pi i$$

محاسبه‌ی مانده بدون استفاده از سری لوران

تعریف: فرض می‌کنیم f در z_0 تحلیلی نیست. در این صورت اگر $f(z)(z-z_0)^k$ در z_0 تحلیلی باشد و $f(z)(z-z_0)^{k-1}$ در z_0 تحلیلی نباشد آنگاه z_0 قطب مرتبه‌ی k برای f است.

(نقطه‌ی غیرتحلیلی)

نتیجه: اگر z_0 نقطه‌ی غیرتحلیلی مرتبه‌ی k برای تابع f باشد آنگاه سری لوران f حول z_0 به صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad \frac{b_{k+1}}{(z-z_0)^{k+1}} \xrightarrow{\times} \frac{b_{k+1}}{(z-z_0)}$$

است

محاسبه‌ی مانده در نقطه غیرتحلیلی مرتبه‌ی k

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \dots + \frac{b_k}{(z-z_0)^k}$$

$$\xrightarrow{\times (z-z_0)^k} (z-z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k} + \underbrace{b_1 (z-z_0)^{k-1} + \dots + b_k}_{\text{چند جمله‌ای از درجه } k-2}$$

$$\xrightarrow{(k-1)\text{ بار مشتق}} \quad \left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (z-z_0)^{n+1} + (k-1)!\, b_1 + 0$$

$z = z_0$

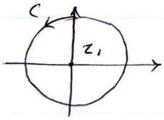
$$\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}\Big|_{z=z_0} = 0 + (k-1)!\, b_1$$

$$\rightarrow b_1 = \frac{1}{(k-1)!}\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}\Big|_{z=z_0} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

مثال:

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z-\pi) z^2} \qquad |z| = 1$$

$z_1 = 0 \qquad z_2 = \pi$



$$\oint_C f(z) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = ?$$

$$f(z) = \frac{\xrightarrow{\text{حول } z_0 \text{ تحلیلی}}\ \frac{\cos z}{z-\pi}}{z^2} \qquad k = 2$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{1!}\left((z-0)^2 f(z)\right)'\Big|_{z=0}$$

$$= \left(z^2 \frac{\cos z}{(z-\pi) z^2}\right)'\Big|_{z=0} = \left(\frac{\cos z}{z-\pi}\right)'\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{-\sin z (z-\pi) - 1\times\cos z}{(z-\pi)^2}\Big|_{z=0} = \frac{0-1}{\pi^2} = \frac{-1}{\pi^2}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \frac{-1}{\pi^2} = \frac{-2i}{\pi}$$

* حالت خاص $k = \infty$

در بسیاری از موارد توان‌های منفی در سری لوران تابع f حول z_0 تا توان ∞ ادامه دارند، به مثال زیر توجه کنید

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

در این صورت مقدار k برابر ∞ است و محاسبه‌ی مانده از رابطه‌ی $\frac{1}{(k-1)!}\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}$ ممکن نیست. به چنین نقطه‌ای نقطه‌ی غیرتحلیلی اساسی می‌گوییم. در این حالت فقط اگر سری لوران f حول z_0 مشخص باشد می‌توان مانده را حول z_0 به دست آورد.

مثال ۱

$$\oint_{\|z\|=1} e^{1/z}\, dz = ?$$

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{z}} \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1$$

$$\oint_{\|z\|=1} e^{1/z}\, dz = 2\pi i \times 1 = 2\pi i$$

مثال ۲

$$\oint_{\|z\|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1/z}}{1+z^2}\, dz$$

$z=0$ نقطه غیرتحلیلی اساسی ← سری لوران

$$f_1(z) = e^{1/z}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad f(z) = f_1(z)\, f_2(z)$$

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad \underset{\|z\|<1}{\frac{1}{1+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n \qquad \left(\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad t=-z^2\right)$$

$$f(z) = f_1(z)\, f_2(z) = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots\right)\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\right)$$

ضریب $\frac{1}{z}$ در سری حاصلضرب $= 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \longrightarrow \sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \sin 1 \qquad \oint_{\|z\|=\frac{1}{2}} f(z)\, dz = 2\pi i \sin 1$$

محاسبه‌ی انتگرال روی خم شامل نقاط غیرتحلیلی - مرور

I) قطب‌های K متناهی

- روش اول: فرمول کوشی

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \longrightarrow \oint_c f(z)dz = 2\pi i \, \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

- نظریه مانده‌ها

- فرمول مانده

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{j} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \left((z-z_i)^k f(z)\right)^{(k-1)} \Big|_{z=z_i}$$

- استفاده از سری لوران

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$$

II) $k = \infty$

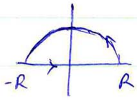
در این حالت فقط در صورت موجود بودن سری لوران می‌توان مانده و سپس مقدار انتگرال را به دست آورد (مثال ۱ و ۲)

جلسه بیست و ششم ۹۴,۳,۹

محاسبه برخی انتگرال‌های حقیقی با استفاده از نظریه مانده‌ها

برخی از انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال مختلط قابل محاسبه هستند. به ۳ نمونه‌ی زیر توجه می‌کنیم

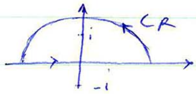
I) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$



۰) تابع $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ و خم C را شامل نیم دایره‌ی C_R و بخش $-R$ تا R از محور حقیقی در نظر می‌گیریم.

۱) از نظریه‌ی مانده‌ها داریم:

$$z^2+1=0 \to z_1=i \qquad z_2=-i$$



$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i} = \frac{1}{z+i}\Big|_{z=i} = \frac{1}{2i} \to \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \times \frac{1}{2i} = \pi$$

۲) از تعریف خم C داریم

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1}$$
$R\to\infty$

$$\underbrace{\oint_C f(z)\,dz}_{\pi} = \int_{C_\infty} f(z)\,dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

۳) نشان می‌دهیم $\int_{C_\infty} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\int_{C_\infty} f(z)\,dz\right| \le ML$$
M: $\max_{C_\infty}|f|$ ، $L \to$ طول خم C_∞

ابتدا برای C_R محاسبه می‌کنیم و سپس $R\to\infty$ میل می‌دهیم

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le ?$$

C_R: طول خم $= \pi R \quad (*)$

$$M = \max_{C_R}|f| = \max_{|z|=R}|f| = \max_{|z|=R}\left|\frac{1}{z^2+1}\right| \qquad \left|\frac{1}{z^2+1}\right| \le ?$$

$$|z^2+1| \ge |z^2|-1 = |z|^2-1 = R^2-1 \to \frac{1}{|z^2+1|} \le \frac{1}{R^2-1} \quad (**)$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le ML \le \frac{1}{R^2-1}\,\pi R$$
$R\to\infty$

$$\left|\int_{C_\infty} f(z)\,dz\right| \leqslant 0 \longrightarrow \int_{C_\infty} f(z)\,dz = 0$$

$$(4 \qquad \oint_C f(z)\,dz = \pi = \cancel{\int_{C_\infty} f(z)\,dz} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

توجه: محاسبات فوق درحالت کلی برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ که p و q چندجمله ای هایی از درجه dp و dq هستند برقرار است درصورتی که شرایط زیر برقرار باشد:

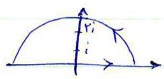
$$M \leqslant \frac{\tilde{p}(R)}{\tilde{q}(R)} \qquad L = \pi R \longrightarrow \left|\int_{C_\infty}\right| \leqslant \lim_{R\to\infty} \frac{\tilde{p}(R)\,\pi R}{\tilde{q}(R)} = 0$$

$$dp + 1 < dq \rightarrow \underline{dq - dp > 1}$$

$$(II \qquad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

تابع $f(z) = \dfrac{e^{4iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ انتخاب می کنیم وخم C را مانند مثال قبل تعریف می کنیم

۱) از نظریه‌ی مانده ها داریم:



$$\oint_C f(z)\,dz = ?$$

$$(z^2+1)(z^2+4) = 0 \rightarrow \pm i \qquad \pm 2i$$

$$z_1 = i \qquad z_2 = 2i$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{4iz}/(z+i)(z^2+4)}{(z-i)} = \left(\frac{e^{4iz}}{(z+i)(z^2+4)}\right)\Bigg|_{z=i} = \frac{e^{-4}}{2i\times 3} = \frac{e^{-4}}{6i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \operatorname*{Res} \frac{e^{4iz}/(z^2+1)(z+2i)}{z-2i} = \left(\frac{e^{4iz}}{(z+2i)(z^2+1)}\right)\Bigg|_{z=2i} = \frac{e^{-8}}{4i\times(-3)} = -\frac{e^{-8}}{12i}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-4}}{6i} - \frac{e^{-8}}{12i}\right) = \frac{\pi e^{-4}}{3} - \frac{\pi e^{-8}}{6}$$

۲) از تعریف خم C داریم

$$\oint_{C}_{R\to\infty} = \int_{C_R} + \int_{-R}^{R} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

$$\oint_C = \int_{C_\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

۳) کران $\int_{C_\infty}$:

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{4iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz\right| \le ML$$

$$L=\pi R \qquad M = \max_{|z|=R} \frac{|e^{4iz}|}{|(z^2+1)(z^2+4)|} \le ?$$

$$i) \quad |e^{4iz}|_{|z|=R} \le ?$$

$$|z| = R \qquad z = R\cos\theta + iR\sin\theta$$

$$\hookrightarrow x = R\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta \qquad |e^{4i(R\cos\theta + iR\sin\theta)}| = |\overset{\tilde r}{e^{-4R\sin\theta}}\, e^{\overset{\tilde\theta}{4R\cos\theta\, i}}| = e^{-4R\sin\theta}$$

$$ii) \quad \left|\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right|_{|z|=R} \le \frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

$$\begin{cases} |z^2+1| \ge R^2-1 \\ |z^2+4| \ge R^2-4 \end{cases}$$

$$i, ii \longrightarrow M = \max\left|\frac{e^{4iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \le \frac{e^{-4R\sin\theta}}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{4iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz\right| \le ML \le \frac{\pi R e^{-4R\sin\theta}}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

$$\left|\int_{C_\infty} \text{〃} \right| \le 0 \longrightarrow \int_{C_\infty} = 0$$

۴) $\oint_C f(z) = \frac{\pi e^{-4}}{3} - \frac{\pi e^{-8}}{6} = \int_{C_\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

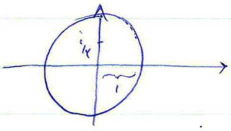
۵) از انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ لازم است انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ محاسبه شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{4ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x + i\sin 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ۴x}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}\,dx = re(\alpha) = \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ۴x}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}\,dx = imag(\alpha) = ۰$$

$$I = \int_{۰}^{۲\pi} \frac{d\theta}{۵ - ۴\sin\theta} \qquad (III$$



$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta \qquad z = \cos\theta + i\sin\theta$

۰) خم C را دایره به شعاع ۱ و مرکز مبدأ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۱}{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{z + ۱/z}{۲} \qquad \sin\theta = \frac{z - ۱/z}{۲i}$$

پس در انتگرال I ، $\sin\theta$ و $\cos\theta$ از روابط بالا جایگذاری می‌شوند هم‌چنین معادل با $d\theta$ برحسب z داریم:

$$z = e^{i\theta} \qquad dz = i\overset{z}{\cancel{e^{i\theta}}}\,d\theta \rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

۱) با جایگذاری $d\theta$ ، $\sin\theta$ و $\cos\theta$ برحسب z داریم:

$$I = \oint_C \frac{dz/iz}{۵ - ۴\frac{z - \frac{۱}{z}}{۲i}} = \oint_C \frac{dz}{۵iz - ۲z^۲ + ۲} = ?$$

۲) از نظریه مانده‌ها داریم:

$$۲z^۲ - ۵iz - ۲ = ۰ \rightarrow z = \frac{۵i \pm \sqrt{-۲۵+۱۶}}{۴} = \frac{۵i \pm ۳i}{۴} \rightarrow z_۱ = \frac{i}{۲} \qquad z_۲ = ۲i$$

بیرون دایره

$$I = ۲\pi i \operatorname*{Res}_{z=i/۲} f(z) \qquad \operatorname*{Res}_{z=i/۲} \frac{۱}{-۲z^۲+۵iz+۲} = \operatorname*{Res}_{z=i/۲} \frac{۱}{(-۲z+i)(z-۲i)} = \operatorname*{Res}_{z=i/۲} \frac{\frac{۱}{۲(z-۲i)}}{z - i/۲}$$

$$= \left.\frac{۱}{-۲(z-۲i)}\right|_{z=i/۲} = \frac{۱}{۳i}$$

$$I = ۲\pi i \times \frac{۱}{۳i} = \frac{۲\pi}{۳}$$